



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 25 април 2010 г.

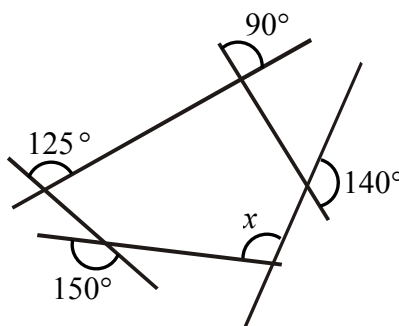
Задачите с номера от 1 до 15 включително се оценяват с по 1 точка:

1. Кой от посочените изрази е с най-голяма стойност?

- А) -3.8^{-2} Б) $(-8)^5$ В) -8^2 Г) $(-3)^2 - (-3)^3$

2. Намерете градусната мярка на ъгъл x от чертежа.

- А) 35° Б) 75°
В) 105° Г) 135°



3. Вярно е, че уравнението $3x - 5 = 3x - 6$

- А) има точно едно решение Б) има точно две решения
В) няма решение Г) има безброй много решения

4. В правилна четириъгълна пирамида всички ръбове са с равни дължини и сборът им е 160 см. Намерете лицето на основата на пирамидата в квадратни сантиметри.

- А) 20 Б) 200 В) 400 Г) 80

5. Сборът на две числа е -10 , а произведението им е 0. По-голямото от двете числа е:

- А) -10 Б) 0 В) 10 Г) не може да се прецени

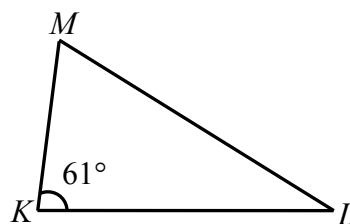
6. От четири опита при стрелба с лък Кирчо постигнал средно аритметичен резултат 7,75 точки. Колко точки трябва да постигне той при петия си опит, за да се получи средно аритметичен резултат 8 точки от петте опита?

7. Решенията на неравенството $2(x-5) \geq 3(4x-1)$ са:

- А) $x \geq -0,7$ Б) $x \geq 0,7$ В) $x \leq 0,7$ Г) $x \leq -0,7$

8. В $\triangle KLM$ ъгълът при върха K е равен на 61° . Ако $KL > KM$, при кой от върховете на триъгълника ъгълът е най-малък?

- А) K Б) L В) M
 Г) не може да се определи



9. Намерете разстоянието между две бензиностанции, ако разстоянието между тях върху карта с мащаб $1 : 25\,000$ е 5 см .

- А) 5 км Б) $12,5\text{ км}$ В) 50 км Г) $1,25\text{ км}$

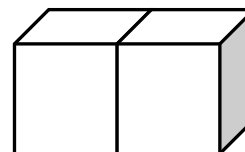
10. Един тракторист изорал $\frac{1}{5}$ от една нива, а друг тракторист изорал $\frac{1}{10}$ от същата нива. Колко процента от нивата са останали неизорани?

- А) 30% Б) 50% В) 70% Г) 90%

11. Отношението на два съседни ъгъла е $7 : 5$. Разликата на тези ъгли е:

- А) 30° Б) 75° В) 105° Г) 60°

12. Да се намери обемът в кубически сантиметри на правоъгълен паралелепипед с пълна повърхнина 360 кв. см , ако паралелепипедът е получен от два еднаква куба, както е показано на чертежа.

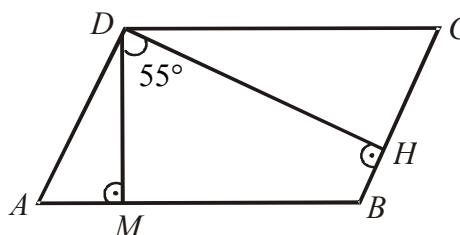


13. За произведението на четири последователни естествени числа **НЕ** винаги е вярно, че се дели на:

- А) 5 Б) 6 В) 8 Г) 12

14. Ъгълът между височините DM ($M \in AB$) и DH ($H \in BC$) в успоредника $ABCD$ е равен на 55° . Намерете острия ъгъл на успоредника.

- А) 35° Б) 55° В) 125° Г) 45°

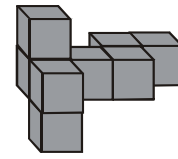


15. Скоростта на катер в спокойно езеро е 16 км/ч . В езерото се влива река със скорост $3,5\text{ км/ч}$. Колко километра ще измине катерът за 2 часа и 12 минути , ако тръгне по реката от мястото на нейното вливане?

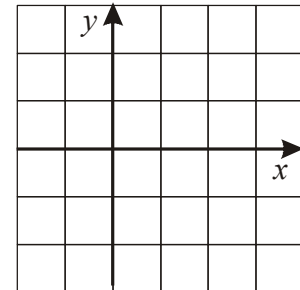
- А) $7,7\text{ км}$ Б) $42,9\text{ км}$ В) $26,5\text{ км}$ Г) $27,5\text{ км}$

Задачите с номера от 16 до 35 включително се оценяват с по 2 точки:

16. Колко кубчета най-малко трябва да се добавят в показаната конструкция от 8 кубчета, за да се получи правоъгълен паралелепипед?



17. В правоъгълна координатна система са дадени точките $A(3; -1)$, $B(-1; -1)$ и $C(-1; 1)$. Коя от точките $M(1; 1)$, $N(3; 1)$ и $P(1; 0)$ лежи върху ъглополовящата на $\angle ABC$?



- А) M Б) N
В) P Г) никоя от посочените

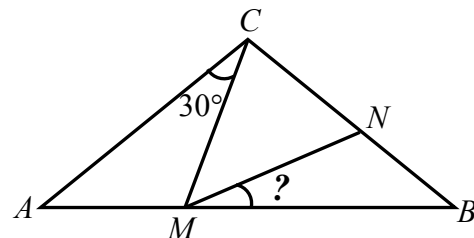
18. Учителката по математика задава по един пример от таблицата за умножение на Ангел, Бисер, Виктор, Генчо и Данчо в този ред. И петимата отговорили правилно, като отговорът на всеки следващ ученик се оказал с 50% по-голям от отговора на предишния. Намерете най-големия прост делител на двата множителя в примера на Генчо.

19. За коя стойност на параметъра a уравнението $(a + 8)x - 3a = 3a(1 - x) - 6$ има безброй много решения?

- А) 0 Б) 1 В) -2 Г) няма такава стойност

20. Върху страните AB и BC на равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) са взети съответно точки M и N така, че $\angle ACM = 30^\circ$ и $CN = CM$. Да се намери градусната мярка на $\angle BMN$.

- А) 10° Б) 15° В) 20° Г) 30°

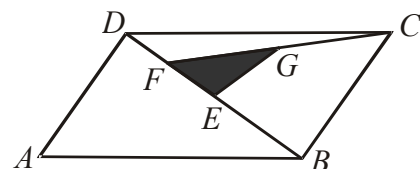


21. Ангел, Боян и Валентин се занимават с различни видове спорт: шах, баскетбол и футбол. Те учат в различни класове: пети, шести и седми. В кой клас учи този от тях, който се занимава с футбол, ако: Ангел и Боян не учат в пети клас, Боян и Валентин не се занимават с шах, а този, който се занимава с баскетбол, не учи в пети клас?

- А) пети Б) шести В) седми Г) не може да се определи

22. Каква част от успоредника $ABCD$ е затъмнена, ако точките E , F и G са средите съответно на отсечките BD , ED и FC ?

- А) $\frac{1}{16}$ Б) $\frac{1}{8}$ В) $\frac{1}{4}$ Г) $\frac{3}{8}$



23. Ако $800a = 400b$, кое от посочените неравенства е винаги вярно?

- А) $a^3 \geq b^3$ Б) $a^3 \leq b^3$ В) $a^4 \geq b^4$ Г) $a^4 \leq b^4$

24. Колко са точките в равнината, зададени спрямо правоъгълна координатна система, за които сборът от координатите е равен на произведението им, както и на отношението на абсцисата и ординатата? Координатните оси се изключват от разглежданията.

- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) повече от 3

25. Ако a , b и c са три различни числа, да положим:

$$A = (2010 - a)(2010 - b) + (2010 - c)(2010 - a) + (2010 - b)(2010 - c),$$

$$B = \left(2010 - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(2010 - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(2010 - \frac{c+a}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad C = 3 \left(2010 - \frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

Посочете вярната зависимост между A , B и C .

- А) $C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ Б) $C = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B$ В) $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ Г) $C = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B$

26. Двама приятели провеждат следния разговор:

Асен: Сборът от годините на трите ми дъщери е равен на номера на къщата отсреща, а произведението от годините им е равно на 72.

Борис: Виждам номера, но не мога да намеря годините на дъщерите ти.

Асен: Как да не можеш! Днес е рожденият ден на най-голямата ми дъщеря.

Борис: Вече знам на колко години е голямата ти дъщеря.

На колко години е голямата дъщеря на Асен, ако годините на трите дъщери са цели числа?

- А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9

27. Даден е $\triangle ABC$, в който $\angle BAC = 42^\circ$, $\angle ABC = 48^\circ$ и $AB = 8$ см. Точката M е средата на отсечката AB , а точката N върху правата AC е такава, че C е между A и N , като $CN = 4$ см. Намерете градусната мярка на $\angle MNC$.

28. Да се намери най-малкото число x , за което $x = a + b + c = d + e + f$, където a , b , c , d , e и f са различни помежду си цели положителни числа.

- А) 10 Б) 11 В) 12 Г) 13

29. Стойността на израза $\frac{2010^3 - 1}{2010^2 + 2011}$ е равна на:

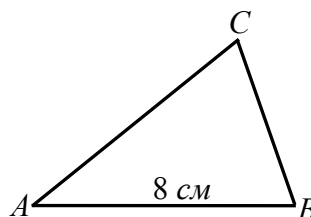
- А) $\frac{2009}{2010}$ Б) 2009 В) 2010 Г) $1 - \frac{1}{2010}$

30. Намерете последната цифра на разликата $A - B$, където $A = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$ и $B = 6^6 + 7^7 + 8^8 + 9^9 + 10^{10}$.

- А) 9 Б) 1 В) 5 Г) 0

31. Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle ABC = \angle ACB - \angle BAC$, $AB = 8$ см и $S_{ABC} = 8$ см². Да се намери мярката на $\angle ABC$, ако $\angle ABC > \angle BAC$.

- А) 75° Б) 60° В) 50° Г) 45°



32. Намерете броя на различните прости делители на израза $5^{2010} + 5^{2011} + 5^{2012}$.

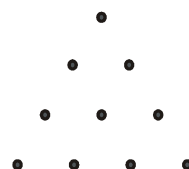
33. Колко цели числа са решения на точно три от неравенствата

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} > 1; \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} > 2, \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} > 3 \text{ и } \frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} > 4?$$

А) 1 Б) 3 В) 4 Г) безброй много

34. Прebroйте ромбовете с върхове измежду дадените точки.

А) 6 Б) 8 В) 9 Г) 10



35. Ако a и b са цели числа, за които $|a| < 3$ и $2 < |b| < 6$, най-голямата стойност на израза $2a - b$ е:

А) 4 Б) 6 В) 9 Г) 11

Задачите с номера от 36 до 50 включително се оценяват с по 3 точки:

36. Решението на уравнението $(ax+1)(a+x-2ax+3) - a(x-1)(x+1) = 0$ за стойностите на параметъра a , при които уравнението е от първа степен, е:

А) няма решение Б) 0 В) -1 Г) -3

37. Дадени са две сплави на злато и сребро. В първата сплав златото е $a\%$, а във втората е $b\%$, като a и b са различни естествени числа, по-малки от 100. Като са използвани a грама от първата сплав и b грама от втората сплав, е получена трета сплав. Като са използвани b грама от първата сплав и a грама от втората сплав, е получена четвърта сплав. Вярно е, че:

А) процентното съдържание на злато в третата сплав е по-голямо, отколкото в четвъртата;

Б) процентното съдържание на злато в четвъртата сплав е по-голямо, отколкото в третата;

В) процентното съдържание на злато в третата и четвъртата сплави е едно и също;

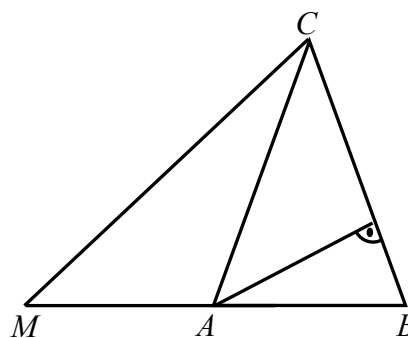
Г) от даденото не може да се определи в коя от сплавите (третата или четвъртата) процентното съдържание на злато е по-голямо.

38. Естествените числа p , q и $r = p^3 + p^2q - 2q^3$ са прости. Намерете числото r .

39. Трима души разпределили помежду си наличните няколко плода с различни тегла така, че всички получили равни тегла плод без нарушаване целостта на плодовете. Към тримата се присъединили още двама и се наложило ново разпределение, при което всички отново получили равни тегла плод без нарушаване целостта на плодовете. Колко броя най-малко са били наличните плодове?

А) 8 Б) 9 В) 10 Г) повече от 10

40. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Върху правата AB е взета точката M така, че A е между B и M и $BM = BC$. Разстоянието от точката A до правата BC е два пъти по-малко от дължината на отсечката CM . Да се намери градусната мярка на най-малкия от ъглите на $\triangle ABC$.



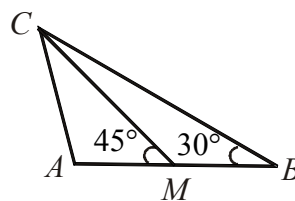
41. Един търговец закупил стока от борсата и определил цена, на която възнамерявал да я продаде в собствения си магазин, за да реализира печалба. По-късно той намалил цената с 10% и продал стоката при новата цена, като реализирал 8% печалба. Колко процента е била първоначално планираната печалба?

- А) 16% Б) 18% В) 20% Г) 22%

42. Да се намери най-голямата цяла стойност на израза $|5x - 3| - |x - 2| - |5x|$, когато x е решение на неравенството $(x - 1)^2 \leq -(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)$.

- А) 0 Б) 3 В) 9 Г) 12

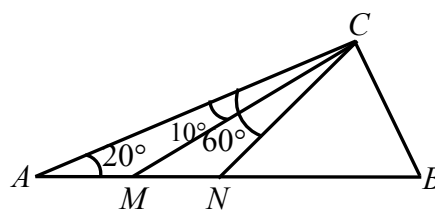
43. Даден е $\triangle ABC$. Ако M е средата на страната AB , $\angle AMC = 45^\circ$ и $\angle ABC = 30^\circ$, да се намери градусната мярка на $\angle BAC$.



44. Една игра започва с дадено естествено число и в нея участват двама души, които редуват ходовете си. На всеки ход играещият намалява числото с някой от неговите делители (единицата също е делител). Губи този, след чийто ход се получава нула. Кое е най-голямото число в интервала $[1; 49]$, с което може да започне играта и ще е сигурно, че първият играч ще спечели при правилна стратегия?

- А) 49 Б) 48 В) 47 Г) 46

45. Върху хипотенузата $AB = 12$ см на правоъгълния триъгълник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) са взети точките M и N така, че $\angle ACM = 10^\circ$ и $\angle ACN = 60^\circ$. Ако $\angle BAC = 20^\circ$, намерете дължината в сантиметри на отсечката MN .



- А) 9 Б) 6 В) 4 Г) 3

46. Най-малката възможна стойност на израза $5x^2 + 20x - 4xy + 4y^2$ е:

- А) 25 Б) 0 В) -35 Г) -25

47. Да се намери най-големият прост делител на сумата от различните прости делители на израза $2010^4 + 2009 \cdot 2010^2 - 2010$.

- А) 17 Б) 43 В) 89 Г) 101

48. За кое от посочените естествени числа a съществува естествено число n така, че изразът $(n+1)^2(n+a)$ е точен куб на естествено число?

А) $a = 2$

Б) $a = 7$

В) $a = 8$

Г) $a = 15$

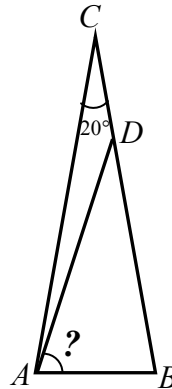
49. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с $\angle ACB = 20^\circ$. Ако D е точка върху бедрото BC така, че $CD = AB$, да се намери градусната мярка на $\angle BAD$.

А) 50°

Б) 60°

В) 70°

Г) 80°



50. Във футболен турнир участвали 15 отбора и всеки отбор играл с останалите точно по веднъж. След завършване на турнира се оказало, че за всеки три отбора има поне два, които в мачовете между тези три са събрали един и същ брой точки. Намерете възможно най-малкия брой равни мачове в турнира, ако при победа се присъждат 3 точки, при загуба – 0 точки, а при равен мач – по 1 точка на двата противника.



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 25 април 2010 г.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Г	11. А	21. А	31. А	41. В
2. В	12. 432	22. А	32. 2	42. А
3. В	13. А	23. Г	33. В	43. 105^0
4. В	14. Б	24. А	34. В	44. Б
5. Б	15. Г	25. А	35. В	45. Б
6. 9	16. 28	26. В	36. Г	46. Г
7. Г	17. А	27. 21^0	37. А	47. В
8. Б	18. 3	28. Б	38. 29	48. Г
9. Г	19. Г	29. Б	39. Б	49. В
10. В	20. Б	30. Б	40. 36^0	50. 30

1. Отг. Г). Единствено изразът в Г) е с положителна стойност.

2. Отг. В). Фигурата на чертежа е петогълник и сборът от вътрешните му ъгли е равен на 3.180^0 . Четири от вътрешните ъгли са върхни или съседни на дадените. Тогава $55^0 + 150^0 + 140^0 + 90^0 + x = 3.180^0$, откъдето $x = 540^0 - 435^0 = 105^0$.

3. Отг. В). $3x - 5 = 3x - 6 \Leftrightarrow 0x = -1$, което е невъзможно.

4. Отг. В). Четиригълната пирамида има 8 ръба и следователно дължината на един ръб е $160 : 8 = 20$ см. Тогава лицето на основата, която е квадрат, е $20.20 = 400$ кв. см.

5. Отг. Б). Щом произведението на двете числа е нула, то единият множител е нула. Тогава вторият множител е -10 и по-големият от двата множителя 0.

6. Отг. 9. Ако означим с x точките при петия опит, то $\frac{7,75.4 + x}{5} = 8$, откъдето $x = 9$.

7. Отг. Г). $2(x - 5) \geq 3(4x - 1) \Leftrightarrow 2x - 10 \geq 12x - 3 \Leftrightarrow -7 \geq 10x \Leftrightarrow -0,7 \geq x$, т.е. $x \leq -0,7$.

8. Отг. Б). Срещу по-голям ъгъл в един триъгълник лежи по-голяма страна. Следователно ъгълът при върха L е по-малък от ъгъла при върха M . Ако този ъгъл е не по-малък от 61° , то сборът на трите ъгъла в триъгълника е по-голям от $3 \cdot 61^\circ = 183^\circ$, което противоречи на теоремата, че сборът на ъглите във всеки триъгълник е 180° . Следователно най-малкият ъгъл в триъгълника е при върха L .

9. Отг. Г). $25\ 000 \cdot 5 = 125\ 000$ см, което е 1,25 км.

10. Отг. В). Тъй като $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$, двамата трактористи са изорали общо $\frac{3}{10}$ от нивата, което е 30%. Следователно неизорани остават 70% от нивата.

11. Отг. А). Ако един от ъглите е $7x$, то другият е $5x$. Тъй като сборът на ъглите е 180° , то $5x + 7x = 180^\circ$. Оттук $x = 15^\circ$, а ъглите са $15 \cdot 7 = 105^\circ$ и $15 \cdot 5 = 75^\circ$. Разликата им е $105^\circ - 75^\circ = 30^\circ$.

12. Отг. 432. Ако страната на куба е a см, то размерите на паралелепипеда в сантиметри са a , a и $2a$. Тогава $360 = 10a^2$, откъдето $a^2 = 36$ и $a = 6$ см. За обема намираме $2a \cdot a \cdot a = 2a^3 = 2 \cdot 6^3 = 432$ куб. см.

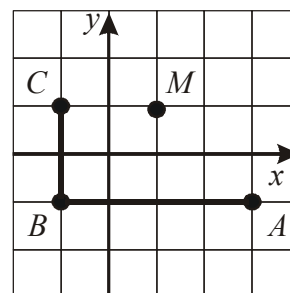
13. Отг. А).

14. Отг. Б). Раменете на $\angle MDH$ и $\angle DAB$ са взаимно перпендикулярни и следователно тези ъгли са равни. Заключаваме, че $\angle DAB = 55^\circ$.

15. Отг. Г). Скоростта на катера по реката (срещу течението) е $16 - 3,5 = 12,5$ км/ч. За 2 часа и 12 минути, които са равни на 2,2 часа, катерът ще измине $12,5 \cdot 2,2 = 27,5$ км.

16. Отг. 28. По трите си измерения конструкцията има съответно 4, 3 и 3 единични кубчета. Следователно най-малкият правоъгълен паралелепипед, който включва показаната конструкция, е $4 \times 3 \times 3$. Този паралелепипед съдържа 36 единични кубчета и следователно трябва да се добавят още $36 - 8 = 28$ единични кубчета.

17. Отг. А). $\angle ABC = 90^\circ$, а $\triangle BMC$ е равнобедрен и правоъгълен. Следователно $\angle MBC = 45^\circ$. В другите случаи ъглите, на които се разделя $\angle ABC$, са различни от 45° .



18. Отг. 3. Ако отговорът на Ангел е n , то следващите отговори последователно са $\frac{3}{2}n$, $\frac{9}{4}n$, $\frac{27}{8}n$ и $\frac{81}{16}n$. Тъй като числото $\frac{81}{16}n$

е цяло, то n трябва да се дели на 16. Ако $n \geq 32$, то $\frac{81}{16}n \geq \frac{81}{16} \cdot 32 = 162$. Най-големият резултат в таблицата за умножение обаче е по-малък от 162 и следователно $n = 16$.

Тогава отговорът на Генчо е $\frac{27}{8}n = 54$. В таблицата за умножение този резултат се получава единствено с множителите 6 и 9, чиито най-голям общ делител е 3.

19. Отг. Г). Даденото уравнение е еквивалентно с $2(a+2)x=3(a-1)$, което няма решение при $a=-2$. При всички останали стойности на a уравнението има единствено решение $x=\frac{3(a-1)}{2(a+2)}$.

20. Отг. Б). Ако $\angle ABC=\alpha$, то $\angle MCB=\angle ACB-\angle ACM=180^{\circ}-2\alpha-30^{\circ}=150^{\circ}-2\alpha$. Тогава $\angle MNC=\frac{1}{2}(180^{\circ}-\angle MCN)=\frac{1}{2}(30^{\circ}+2\alpha)=15^{\circ}+\alpha$ и тъй като този ъгъл е външен за $\triangle MBN$, получаваме, че $\angle BMN=15^{\circ}+\alpha-\alpha=15^{\circ}$.

21. Отг. А). От първото твърдение следва, че Валентин учи в пети клас. От второто твърдение следва, че Ангел се занимава с шах. От третото твърдение следва, че или Ангел, или Боян се занимава с баскетбол. Но тъй като Ангел се занимава с шах, то остава с баскетбол да се занимава Боян. Следователно Валентин се занимава с футбол и той е ученик в пети клас.

22. Отг. А). $S_{EGF}=\frac{1}{2}S_{ECF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{DEC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{DBC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{16}S_{ABCD}$.

23. Отг. Г). Като съкратим двете страни на равенството от условието на 400, получаваме $2a=b$, откъдето $16a^4=b^4$. Но $a^4\geq 0$ и следователно $a^4\leq 16a^4$, т.е. $a^4\leq b^4$. Заключаваме, че неравенството в Г) е винаги вярно. Останалите неравенства не винаги са верни. Наистина, ако $a=1$ и $b=2$, то А) и В) не са верни, а при $a=-1$ и $b=-2$ не е изпълнено Б).

24. Отг. А). Нека $(x; y)$ е точка с исканото свойство, т.е. $x+y=xy=\frac{x}{y}$. От второто равенство (като разделим на x) получаваме $y=\frac{1}{y}$. Отгук $y^2=1$ и следователно $y=\pm 1$. По-нататък заместваме y в равенството $x+y=xy$. При $y=1$ получаваме $x+1=x$, което не е възможно. При $y=-1$ стигаме до $x-1=-x$, откъдето $x=\frac{1}{2}$. Точката $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ е единствената с исканите свойства.

25. Отг. А). Ако $2010-a=x$, $2010-b=y$ и $2010-c=z$, то $A=xy+yz+zx$, $4B=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ и $C=\frac{1}{3}(x+y+z)^2$. Сега лесно следва, че $3C=x^2+y^2+z^2+2A$ и $4B=2(x^2+y^2+z^2)+2A$, откъдето $3C-2A=2B-A$, т.е. $C=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}B$. Другите зависимости не са изпълнени. Наистина, ако допуснем, че някоя от тях е в сила, то лесно се установява, че от нея и от току-що доказаната връзка следва равенство $A=B$, което е еквивалентно с $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. От друга страна $x^2+y^2\geq 2xy$, $y^2+z^2\geq 2yz$ и $z^2+x^2\geq 2zx$. Като съберем почленно тези три неравенства, получаваме $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ и равенство се достига само ако

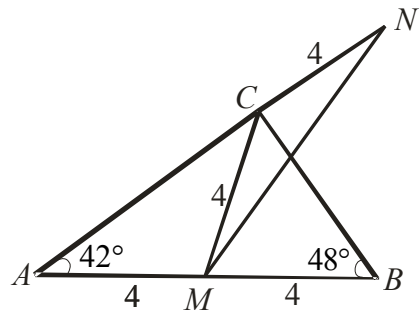
$x = y = z$, т.е. когато $a = b = c$. Заклучаваме, че равенството $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ е невъзможно, защото по условие числата a , b и c са различни.

26. Отг. В).

първа дъщеря	втора дъщеря	трета дъщеря	сбор
1	1	72	74
1	2	36	39
1	3	24	28
1	4	18	23
1	6	12	19
1	8	9	18
2	2	18	22
2	3	12	17
2	4	9	15
2	6	6	14
3	3	8	14
3	4	6	13

В таблицата са показани възможните разлагания на числото 72 на произведение от 3 множителя. Само в два от случаите сборовете на трите възрасти съвпадат помежду си и са равни на 14. От условието на задачата следва, че номерът на къщата е точно 14, защото в противен случай номерът идентифицира еднозначно годините на трите дъщери. Ако възрастите са 2, 6, 6, то няма да има най-голяма дъщеря (в този случай най-големите дъщери са две). Остава комбинацията 3, 3, 8 и следователно най-голямата дъщеря на Асен е на 8 години.

27. Отг. 21°. От даденото следва, че $\angle ACB = 90^\circ$ и получаваме, че $CM = \frac{1}{2}AB = 4$ см. Тогава $\triangle MCN$ е равнобедрен ($CM = CN = 4$ см). От друга страна $\angle MCA = \angle MAC = 42^\circ$ и $\angle MCA$ е външен за $\triangle MCN$. Следователно $\angle MNC = \frac{1}{2} \cdot 42^\circ = 21^\circ$.



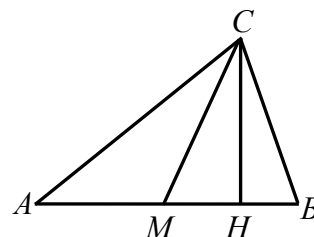
28. Отг. Б). Като съберем почленно двете равенства, получаваме $2x = a + b + c + d + e + f \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

и следователно $x \geq 11$. Числото 11 може да се реализира по следния начин: $11 = 1 + 3 + 7 = 2 + 4 + 5$. Следователно отговорът на задачата е 11.

29. Отг. Б).
$$\frac{2010^3 - 1}{2010^2 + 2011} = \frac{(2010 - 1)(2010^2 + 2010 \cdot 1 + 1^2)}{1 + 2010 + 2010^2} = 2010 - 1 = 2009.$$

30. Отг. Б). Последната цифра на A е 3, а последната цифра на B е 4. Тъй като $A < B$, то последната цифра на $A - B$ е 1.

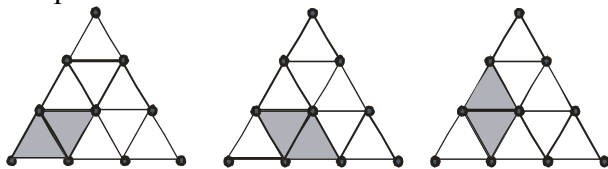
31. Отг. А). Щом $\angle ACB = \angle BAC + \angle ABC$, то $2\angle ACB = 180^\circ \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$. Но тогава височината CH ($H \in AB$) към хипотенузата AB ще има дължина 2 см, защото $8 = S = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{8CH}{2} = 4CH$. От друга страна $CM = 4$ см, където M е средата на AB . В правоъгълния $\triangle MHC$ катетът CH е половината от хипотенузата CM , което означава, че $\angle CMH = 30^\circ$. От равнобедрения $\triangle MBC$ ($MB = MC$) следва, че $\angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$.



32. Отг. 2. От представянето $5^{2010} + 5^{2011} + 5^{2012} = 5^{2010}(1 + 5 + 5^2) = 5^{2010} \cdot 31$ следва, че единствените прости делители на числото от условието са 5 и 31.

33. Отг. В). Ако някое число x е решение на последното неравенство, то това число ще бъде решение и на останалите три и следователно не е решение на задачата. Заключаваме, че търсените числа x трябва да са решения на неравенството $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} \leq 4$. Оттук $x \leq \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$, т.е. $x \leq 16$. От друга страна, числото x трябва да е решение и на останалите три неравенства, т.е. на третото, защото първите две са изпълнени винаги, когато е изпълнено третото. Следователно $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} > 3$, откъдето $x > \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$. Получаваме, че решенията на задачата са числата $x = 13, 14, 15$ и 16 , които са 4 на брой.

34. Отг. В). По-лесно преброяване може да стане, ако точките се свържат с отсечки, при което се получават 9 малки триъгълничета. От тях 5 са на долния ред, 3 са на реда в средата, а последното триъгълниче е най-горе. Най-напред трябва да се забележи, че страната на кой да е от търсените ромбове е равна на страната на малкото триъгълниче. Освен това, всеки две съседни (с обща страна) триъгълничета на долния ред образуват ромб. Тъй като двойките съседни триъгълничета са 4, то и ромбовете на долния ред са 4. По същия начин преброяваме 2 ромба на реда в средата. Остава да се преброят и ромбовете, които са образувани от две съседни триъгълничета, но от различни редове. Един такъв ромб е показан на третия чертеж. Общо ромбовете от този вид са 3. Окончателно търсеният брой е $4 + 2 + 3 = 9$.



35. Отг. В). От $|a| < 3$ следва, че най-голямата цяла стойност на a е 2, а от $2 < |b| < 6$ следва, че най-малката цяла стойност на b е -5 . Тогава най-голямата стойност на $2a - b$ е $2 \cdot 2 - (-5) = 4 + 5 = 9$.

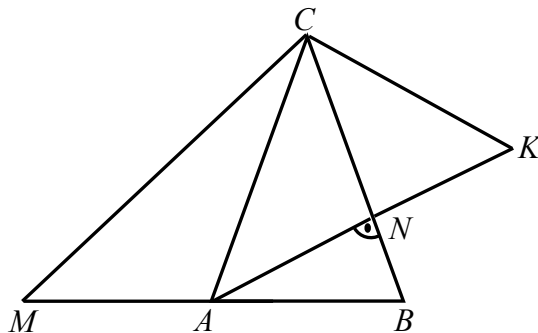
36. Отг. Г). След разкриване на скобите намираме, че коефициентът пред x^2 е $-2a^2$ и той е равен на 0 при $a=0$. Това е единственият случай, при който уравнението е от първа степен. Самото уравнение приема вида $x+3=0$, чийто корен е $x=-3$.

37. Отг. А). Теглото на двете получени сплави е едно и също и е равно на $(a+b)$ грама. Достатъчно е да сравним количеството злато в двете сплави. В третата сплав то е $\frac{a}{100} \cdot a + \frac{b}{100} \cdot b = \frac{1}{100}(a^2 + b^2)$ грама, а в четвъртата е $\frac{a}{100} \cdot b + \frac{b}{100} \cdot a = \frac{1}{100} \cdot 2ab$ грама. Тъй като $\frac{1}{100}(a^2 + b^2) - \frac{1}{100} \cdot 2ab = \frac{1}{100}(a-b)^2 > 0$, то верният отговор е А).

38. Отг. 29. Имаме $r = p^3 + p^2q - 2q^3 = p^3 - q^3 + p^2q - q^3 = (p-q)(p^2 + 2pq + 2q^2)$. Очевидно $p^2 + 2pq + 2q^2 > 1$ и ако $p-q > 1$, то числото r ще е съставно. Ето защо $p-q=1$ и понеже p и q са прости, това е възможно само ако $p=3$ и $q=2$. Тогава $r=29$.

39. Отг. Б). Ако плодовете са били най-много 8, то поне двама е трябвало да получат по 1 плод, защото $4 \cdot 2 + 1 = 9 > 8$. Тъй като не е възможно двама да са получили по 1 плод (по условие плодовете са с различни тегла и в такъв случай не е възможно тези двама да получат еднакви тегла плод), то броят на наличните плодове е поне 9. Ще дадем пример за 9 плода, при който се реализират условията на задачата: първи плод = 100 г, втори плод = 200 г, трети плод = 300 г, четвърти плод = 400 г, пети плод = 500 г, шести плод = 600 г, седми плод = 700 г, осми плод = 800 г и девети плод = 900 г; тогава $900 = 100 + 800 = 200 + 700 = 300 + 600 = 400 + 500$ и $900 + 600 = 800 + 700 = 100 + 200 + 300 + 400 + 500$.

40. Отг. 36° . Нека $AN (N \in BC)$ е перпендикулярът от точката A към правата BC , а K е такава точка върху AN , че N е средата на AK . Тогава $AK = 2AN = MC$ съгласно даденото. В $\triangle AKC$ отсечката CN е медиана и височина. Следователно този триъгълник е равнобедрен с бедра $AC = CK$. Оттук следва, че триъгълниците ACK и MBC са еднакви по трети признак, тъй като $AC = CK = BC = BM$ и $AK = MC$. От еднаквостта на тези триъгълници следва, че $\angle ABC = \angle ACK$ и ако означим $\angle ACB = \gamma$, то $\angle ABC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ и $\angle ACK = 2\gamma$.



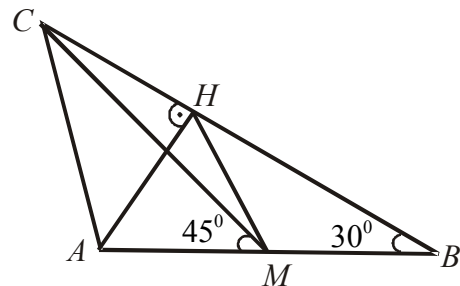
Следователно $90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 2\gamma \Rightarrow \gamma = 36^\circ$, т.е. ъглите на $\triangle ABC$ са $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

41. Отг. В). Да означим с a вложената сума за закупуване на стоката от борсата, а с b планираната сума за получаване след продажбата на тази стока. Тъй като търговецът е намалил цената с 10%, той фактически е получил сумата $b - 0,1b = 0,9b$. От друга страна тази сума е $a + 0,08a = 1,08a$. Оттук $0,9b = 1,08a$ и следователно $\frac{b}{a} = \frac{1,08}{0,9} = 1,2$.

Тъй като планираната печалба е $\frac{b-a}{a} \cdot 100\% = 100\left(\frac{b}{a} - 1\right)\%$, то като заместим, намираме, че тя е $100\left(\frac{b}{a} - 1\right)\% = 100(1,2 - 1)\% = 20\%$.

42. Отг. А). Решенията на неравенството $(x-1)^2 \leq -(x+2)^2 + 2(x^2+2)$ са $x \leq -\frac{1}{2}$. За тези стойности на x имаме $5x-3 < 0$, $x < 2$ и $x < 0$. Тогава $|5x-3| = -(5x-3) = -5x+3$, $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ и $|5x| = -5x$. Следователно $|5x-3| - |x-2| - |5x| = -5x+3+x-2+5x = x+1$ и най-голямата цяла стойност на този израз в разглеждания интервал е 0. Тя се достига при $x = -1$.

43. Отг. 105° . От $\angle AMC = 45^\circ$ следва, че $\angle MCB = 15^\circ$ ($\angle AMC$ е външен за $\triangle MBC$). Нека $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Тъй като $\angle ABC$ е остър, точката H е вътрешна за страната BC . От друга страна HM е медиана в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл 30° и следователно $\triangle AMH$ е равностранен. Тогава $\angle CMH = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Получаваме, че $\triangle CMH$ е равнобедрен, т.е. $CH = MH$. Но $MH = AH$ и заключаваме, че $\triangle CAH$ е също равнобедрен. Оттук $\angle ACH = 45^\circ$ и следователно $\angle BAC = 180^\circ - (\angle ACH + \angle ABC) = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$.



44. Б). Играта печели този, след чийто ход се получава 1. Губещи позиции са нечетните числа. Най-голямото четно число в разглеждания интервал е 48. Ако първият играч избере делител 1, за втория играч остава да извършва действия с нечетно число. Какъвто и делител да избере вторият играч, след неговия ход ще се получи четно число (нечетните числа имат само нечетни делители и разликата на две нечетни числа е четна). Печелившата стратегия на първия играч е да избира само нечетни делители (например само 1).

45. Отг. Б). Върху правата през M , която е успоредна на CN , взимаме точка L така, че $\angle ACL = 40^\circ$, като L и N са в различни полуравнини спрямо правата CM . Тогава $\triangle MCL$ е равнобедрен ($ML = CL$). Освен това, $\angle MLC = \angle LMN = 80^\circ$ и следователно трапецът $LMNC$ е равнобедрен. Заключаваме, че $ML = CL = MN$. Нека O е точка върху отсечката MN така, че $\angle OLM = 20^\circ$. Тогава $\triangle MOL$ е равнобедрен, защото $\angle OML = \angle MOL = 80^\circ$. В частност $OL = LM$ и следователно $\triangle OCL$ е равностранен (равнобедрен с ъгъл при върха, равен на 60°). Сега $\angle COB = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ и тъй

като $\angle OBC = 70^\circ$, то $\triangle OBC$ е равнобедрен ($OC = OB$). Но и $\triangle AOC$ е равнобедрен ($\angle BAC = \angle ACO = 20^\circ$). Следователно $OC = \frac{1}{2} AB$. От разглежданията по-горе следва, че $MN = OC$ и заключаваме, че $MN = \frac{1}{2} AB = 6$ см.

46. Отг. Г). $5x^2 + 20x - 4xy + 4y^2 = (2x + 5)^2 + (x - 2y)^2 - 25$. Тъй като за всички стойности на x и y е изпълнено $(2x + 5)^2 + (x - 2y)^2 \geq 0$, най-малката стойност на израза от условието на задачата е равна на -25 и тя се достига при $x = -\frac{5}{2}$ и $y = -\frac{5}{4}$.

47. Отг. В).

$$\begin{aligned} 2010^4 + 2009 \cdot 2010^2 - 2010 &= 2010^4 + 2009 \cdot 2010^2 - 2009 - 1 = (2010^4 - 1) + 2009(2010^2 - 1) = \\ &= (2010^2 - 1)(2010^2 + 1) + 2009(2010^2 - 1) = (2010^2 - 1)(2010^2 + 1 + 2009) = \\ &= 2009 \cdot 2011 \cdot (2010^2 + 2010) = 2009 \cdot 2011 \cdot 2010 \cdot 2011 = 2009 \cdot 2010 \cdot 2011^2. \end{aligned}$$

Тъй като $2009 = 7^2 \cdot 41$, $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ и 2011 е просто число, сумата от различните прости делители на израза от условието е $7 + 41 + 2 + 3 + 5 + 67 + 2011 = 2136 = 2^3 \cdot 3 \cdot 89$. Най-големият прост делител на полученото число е 89 .

48. Отг. Г). При $a = 2$ са в сила неравенствата $(n + 1)^3 < (n + 1)^2(n + 2) < (n + 2)^3$ и следователно $a = 2$ не е решение на задачата, защото изразът от условието е между кубовете на две последователни естествени числа. При $a = 7$ имаме $(n + 2)^3 - (n + 1)^2(n + 7) = -3n^2 - 3n + 1 < 0$ и $(n + 3)^3 - (n + 1)^2(n + 7) = 12n + 20 > 0$, което показва, че и $a = 7$ не е решение на задачата. При $a = 8$ по същия начин показваме, че $(n + 2)^3 < (n + 1)^2(n + 8) < (n + 4)^3$. В този случай единствената възможност $(n + 1)^2(n + 8)$ да е точен куб е да е изпълнено равенството $(n + 1)^2(n + 8) = (n + 3)^3$, откъдето получаваме, че $n^2 - 10n = 19$. Тъй като $n^2 - 10n = n(n - 10)$, заключаваме, че $n = 1$ или $n = 19$. С проверка се установява, че тези числа не удовлетворяват разглежданото равенство. Нека накрая $a = 15$. Сега е достатъчно да изберем $n = 1$, при което намираме, че изразът $(n + 1)^2(n + a)$ е равен на 4^3 .

49. Отг. В). Нека точката E в равнината на триъгълника е такава, че $\angle BAE = 20^\circ$ и $\angle BCE = 40^\circ$. Тогава $\triangle ACE = 60^\circ$ и

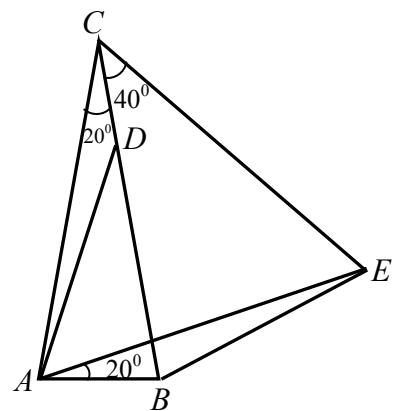
$$\angle EAC = \angle BAC - \angle BAE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

Заключаваме, че $\triangle AEC$ е равностранен и следователно $AE = AC$. Тогава триъгълниците ACD и EAB са еднакви по I признак. От друга страна $\triangle BEC$ е равнобедрен ($BC = EC$), откъдето

$$\angle CEB = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ. \text{ Имаме}$$

$$\angle CAD = \angle AEB = \angle CEB - \angle CEA = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ.$$

Следователно $\angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$.



50. Отг. 30. Да означим с A един от отборите. Ще използваме следния факт: ако A е завършил по един и същ начин мачовете си с отборите B и C , т.е. A е победил B и C , A е загубил от B и C или A е завършил наравно с B и C , то мачът между B и C със сигурност е бил равен. Сега да означим с m броя на победите на A в турнира, с n броя на загубите му и с k броя на равните му мачове. Имаме $m+n+k=14$. От друга страна, съгласно отбелязания по-горе факт можем да твърдим, че в мачовете между m -те отбора, които са победени от A , равните мачове са $\frac{m(m-1)}{2}$. Аналогично, в

мачовете между n -те отбора, които са победили A , равните мачове са $\frac{n(n-1)}{2}$, а в мачовете между k -те отбора, които са завършили наравно с A , равните мачове са $\frac{k(k-1)}{2}$. Следователно всички равни мачове в турнира са

$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{1}{2}(m(m-1) + n(n-1) + k(k+1))$ и ако допуснем, че това число е по-малко от 30, получаваме $m(m-1) + n(n-1) + k(k+1) < 60$. Отгук, като използваме, че $m+n+k=14$, т.е. че $k=14-m-n$, намираме $m^2 - 2m + n^2 - 2n + k^2 + 1 + 1 < 48$ и $(m-1)^2 + (n-1)^2 + k^2 < 48$. Нека $a=m-1$ и $b=n-1$. Тогава $a^2 + b^2 + k^2 < 48$ и $a+b+k=12$. Ще използваме, че $a^2 + b^2 \geq 2ab$ и аналогично, че $a^2 + k^2 \geq 2ak$ и $b^2 + k^2 \geq 2bk$. Като съберем почленно последните 3 неравенства, получаваме $2(a^2 + b^2 + k^2) \geq 2(ab + ak + bk)$, т.е. $a^2 + b^2 + k^2 \geq ab + ak + bk$. Заместваме по-горе и стигаем до:

$$144 = 12^2 = (a+b+k)^2 = a^2 + b^2 + k^2 + 2(ab + bk + ak) \leq 3(a^2 + b^2 + k^2) < 3 \cdot 48 = 144,$$

т.е. $144 < 144$, което е невъзможно. Така получаваме, че възможно най-малкият брой равни мачове в турнира е 30. Една възможна реализация на 30 е следната. Да разделим 15-те отбора на 3 групи (I, II и III) от по 5 отбора. Нека всеки отбор от I група е победил всеки отбор от II група, всеки отбор от II група е победил всеки отбор от III група, а всеки отбор от III група е победил всеки отбор от I група. Освен това нека мачовете между отборите в коя да е от групите са завършили наравно. Следователно общият брой равни мачове в турнира е $3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 30$. Остава да покажем, че за всеки три

отбора има поне два, които от мачовете в тройката са събрали един и същ брой точки. Проверката може да се извърши, като се разгледат трите възможности за една тройка: когато трите отбора са в една група, когато трите отбора са в различни групи и когато два от отборите са в една от групите, а третият е в друга група.